TRAVAIL D'ETE pour les élèves de Seconde afin de bien démarrer leur Classe de Première

CORRECTIONS

I A faire impérativement avant la rentrée

Exercice 1 Notions d'intervalles

① **Ecris l'intervalle** correspondant à l'inégalité ou l'encadrement proposé

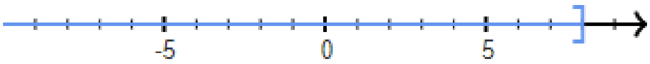
a) Soit x un nombre réel tel que $-5 < x < 1$ alors $x \in]-5; 1[$

b) Soit x un nombre réel tel que $x \geq -\frac{1}{3}$ alors $x \in \left[\frac{-1}{3}; +\infty\right[$

c) Soit x un nombre réel tel que $x < -\sqrt{3}$ alors $x \in]-\infty; -\sqrt{3}[$

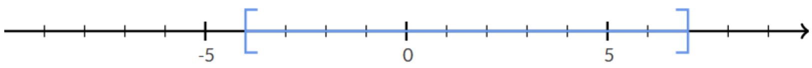
② **Ecris l'inégalité ou l'encadrement** correspondant à la coloration sur un axe gradué

a) Soit x un nombre réel appartenant à un intervalle représenté en bleu ci-dessous



$x \in]-\infty; 8]$ *intervalle fermé en 8*

b) Soit x un nombre réel appartenant à un intervalle représenté en bleu ci-dessous



$x \in [-4; 7]$ intervalle *fermé*

③ **Donner la réunion des intervalles** $]-5; +\infty[$ et $[-26; 4[$.

$]-5; +\infty[\cup [-26; 4[= [-26; +\infty[$

c'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à l'un ou à l'autre des deux intervalles

④ **Donner la réunion des intervalles** $]6; 18[$ et $[-3; 4[$.

$]6; 18[\cup [-3; 4[$ que l'on écrit $[-3; 4[\cup]6; 18[$

⑤ **Donner l'intersection des intervalles** $[-30; 3[$ et $]-2; 7[$.

$[-30; 3[\cap]-2; 7[=]-2; 3[$

c'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent aux deux intervalles

⑥ **Donner l'intersection des intervalles** $]4; +\infty[$ et $\left[-1; \frac{-3}{16}\right]$.

$$]4; +\infty[\cap \left[-1; \frac{-3}{16}\right] = \emptyset$$

Exercice 2 Vrai - Faux à justifier en détails !

Affirmation 1 : $-2 - 3 + 5 + 1 - 2(-10 + 7) = 0$

$\mathbf{-2 - 3} + 5 + 1 - 2(-10 + 7) = -5 + 5 + 1 - 2 \times (-3) = 1 + 6 = 7$ *donc c'est FAUX*

Affirmation 2 : $1-\frac{1}{3}=0{,}67$

$1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}\approx 0{,}667$ *donc c'est FAUX*

Affirmation 3 : $-3\times\left(\frac{1}{6}-2\right)=-\frac{11}{2}$

$-3\times\left(\frac{1}{6}-2\right)=-3\times\left(\frac{1-12}{6}\right)=-3\times\left(\frac{-11}{3\times2}\right)=\frac{11}{2}$ *donc c'est FAUX*

Affirmation 4 : $\left(-3+\frac{7}{5}\right):(-3)=-\frac{8}{15}$

$\left(-3+\frac{7}{5}\right):(-3)=\left(\frac{-15+7}{5}\right):(-3)=\frac{-8}{5}\times\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{8}{15}$ *donc c'est FAUX*

Affirmation 5 : $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{14}=\frac{1}{12}$

$\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{14}=\frac{\frac{3+4}{2\times3}}{14}=\frac{7}{6}\times\frac{1}{14}=\frac{7}{6}\times\frac{1}{7\times2}=\frac{1}{12}$ *donc c'est VRAI*

Rappel : un contre-exemple suffit pour montrer que l'affirmation est fausse !

Affirmation 6 : $\frac{4x+1}{2}=2x+1$

Prenons $x=0$, dans le membre de gauche on obtient $\frac{1}{2}=0{,}5$ et dans le membre de droite on obtient 1 donc c'est FAUX

Erreur faite $\frac{4x+1}{2}=\frac{4x}{2}+\frac{1}{2}=2x+\frac{1}{2}$ *et non* $2x+1$

Affirmation 7 : $(2x-1)(3x+2)=6x^2-2$

Prenons $x=1$, dans le membre de gauche on obtient 5 et dans le membre de droite on obtient 4 donc c'est FAUX

Erreur faite $(2x-1)(3x+2)=6x^2+4x-3x-2=6x^2+x-2$ *à l'aide de la double distributivité*

Affirmation 8 : Pour tous les réels différents de -1 et de 0, $\frac{2}{x}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{-x^2+6x+2}{x(x+1)}$

Prenons $x=1$, dans le membre de gauche on obtient $2-\frac{5}{2}=\frac{-1}{2}$ et dans le membre de droite on obtient $\frac{-1+2+2}{1\times2}=\frac{3}{2}$ donc c'est FAUX

Erreur faite $\frac{2}{x}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)-x(x+4)}{x(x+1)}=\frac{2x+2-x^2-4x}{x(x+1)}=\frac{-x^2-2x+2}{x(x+1)}$

Exercice 3

1) Ecrire sous la forme d'une fraction irréductible les expressions suivantes puis vérifier à la calculatrice :

$A=\frac{7}{9}-\frac{12}{9}\times\frac{-5}{4}$ $\qquad B=\frac{-5}{2+\frac{11}{2}}$ $\qquad C=\left(-\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)\div\frac{45}{21}$ $\qquad D=\frac{36}{4}\times\frac{24}{42}$

$A=\frac{7}{9}-\frac{3\times4}{9}\times\frac{-5}{4}$ $\qquad B=\frac{-5}{\frac{4+11}{2}}$ $\qquad C=\left(-\frac{10}{12}+\frac{5}{12}\right)\div\frac{3\times15}{3\times7}$ $\qquad D=9\times\frac{6\times4}{6\times7}$

$A=\frac{7}{9}+\frac{15}{9}=\frac{22}{9}$ $\qquad B=\frac{-5}{\frac{15}{2}}$ $\qquad C=\left(-\frac{5}{12}\right)\div\frac{15}{7}$ $\qquad D=\frac{9}{1}\times\frac{4}{7}$

$B=-5\times\frac{2}{3\times5}$ $\qquad C=\left(-\frac{5}{12}\right)\times\frac{7}{3\times5}$ $\qquad D=\frac{36}{7}$

$B=-\frac{2}{3}$ $\qquad C=\frac{-7}{36}$

2) Ecrire sous la forme a^n, *avec a un réel et n un entier*, les expressions suivantes puis vérifier à la calculatrice :

$A = \dfrac{(7^2)^{-3}}{7^3}$ $\quad B = \dfrac{(-5)^3}{(-5)^6}$ $\quad C = \dfrac{5^{-7}\times 5^8}{5^{-4}\times 5^2}$ $\quad D = \dfrac{3^3\times(2^{-4})^3}{2^{-6}\times 3^9}$

$A = \dfrac{7^{2\times(-3)}}{7^3}$

$A = 7^{-6-3}$

$A = 7^{-9}$

$B = (-5)^{3-6}$

$B = (-5)^{-3}$

$C = \dfrac{5^{-7+8}}{5^{-4+2}}$

$C = \dfrac{5^1}{5^{-2}}$

$C = 5^{1-(-2)}$

$C = 5^3$

$D = \dfrac{3^3\times 2^{-12}}{2^{-6}\times 3^9}$

$D = 3^{3-9}\times 2^{-12-(-6)}$

$D = 3^{-6}\times 2^{-6}$

$D = (3\times 2)^{-6} = 6^{-6}$

3) Simplifier au maximum les expressions suivantes en écrivant les étapes de calcul puis vérifier à la calculatrice :

$A = \left(-3\sqrt{7}\right)^2$ $\quad B = \sqrt{98}\times\left(\sqrt{2}\right)^3$ $\quad C = \sqrt{6}\times\sqrt{81}\times\sqrt{6}$ $\quad D = \dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$

$A = (-3)^2\times\left(\sqrt{7}\right)^2$

$A = 9\times 7$

$A = 63$

$B = \sqrt{2\times 49}\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}$

$B = \sqrt{2}\times\sqrt{49}\times 2\times\sqrt{2}$

$B = 7\sqrt{2}\times 2\times\sqrt{2}$

$B = 7\times 2\times 2$

$B = 28$

$C = \left(\sqrt{6}\right)^2\times 9$

$C = 6\times 9$

$C = 54$

$D = \dfrac{\sqrt{2\times 144}}{\sqrt{2}}$

$D = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{144}}{\sqrt{2}}$

$D = \sqrt{144}$

$D = 12$

$E = -7\sqrt{13}+\sqrt{13}-4\sqrt{13}-\sqrt{13}$

$E = \sqrt{13}\,(-7+1-4-1)$

$E = \sqrt{13}\,(-11)$

$E = -11\sqrt{13}$

$F = \left(-\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)-\left(12\sqrt{2}-7\sqrt{3}\right)$

$F = -\sqrt{3}+3\sqrt{2}-12\sqrt{2}+7\sqrt{3}$

$F = (-1+7)\sqrt{3}+(3-12)\sqrt{2}$

$F = 6\sqrt{3}-9\sqrt{2}$

Exercice 4

1) Ecrire chaque expression sous la forme d'un quotient

Pour tout réel $x\neq 0$, $2+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x+1}{x}$; **Pour tout réel $x\neq 0$**, $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$;

Pour tout réel $x\neq -1$, $2x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x(x+1)-1}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$;

Pour tout réel $x\neq -3$, $-5-x+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{-5(x+3)-x(x+3)+x}{x+3}=\dfrac{-5x-15-x^2-3x+x}{x+3}=\dfrac{-x^2-7x-15}{x+3}$

2) Montrer des égalités

Différentes méthodes sont possibles pour montrer que A = B :

① Transformer un des deux membres de l'égalité A (ou B) et obtenir le deuxième B (ou A).

*② Transformer **séparément** les deux membres de l'égalité pour obtenir un même résultat C*

③ Montrer que A – B est égal à 0.

a) Montrer que, pour tout réel x, $(2x-1)(-2x+3)=-4x^2+8x-3$.

On développe le membre de gauche $(2x-1)(-2x+3)$ et on obtient :

$$\begin{aligned}(2x-1)(-2x+3) &= 2x\times(-2x)+2x\times 3-1\times(-2x)-1\times 3\\ &= -4x^2+6x+2x-3\\ &= -4x^2+8x-3\end{aligned}$$

b) Montrer que, pour tout réel x, $(2x-1)^2-(-6-x)^2=(x-7)(3x+5)$

On factorise le membre de gauche $(2x-1)^2-(-6-x)^2$ et on obtient :

$(2x-1)^2-(-6-x)^2=[(2x-1)-(-6-x)][(2x-1)+(-6-x)]$

$(2x-1)^2-(-6-x)^2=[2x-1+6+x][2x-1-6-x]$

$(2x-1)^2-(-6-x)^2=[3x+5][x-7]$

Rq) On peut aussi développer les deux membres **séparément** mais c'est plus long, on obtient pour chacun

$(2x-1)^2-(-6-x)^2=3x^2-16x-35 \qquad et \qquad [3x+5][x-7]=3x^2-16x-35$

c) Montrer que, pour tout réel x non nul, $4x-\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$.

On réduit au même dénominateur le membre de gauche puis on factorise le numérateur :

$$4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$$

d) Montrer que, pour tout réel x différent de -1, $2x-3-\frac{2}{x+1}=\frac{2x^2-x-5}{x+1}$.

On réduit au même dénominateur le membre de gauche :

$$2x-3-\frac{2}{x+1}=\frac{(2x-3)(x+1)-2}{x+1}=\frac{2x^2+2x-3x-3-2}{x+1}=\frac{2x^2-x-5}{x+1}$$

3) Maîtriser les identités remarquables

Partie A **Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse**

① Une expression factorisée de $x^2+9x-10$ est :

a) $x(x+9)-10$ b) $(x-1)(x+10)$ c) $(x+1)(x-10)$

② Une expression développée de $(2x+1)(-3x-4)$ est :

a) $5x-3$ b) $-6x^2-5x-4$ c) $-6x^2-11x-4$

③ Une expression factorisée de $x^2-(5x+8)^2$ est :

a) $(6x+8)(-4x-8)$ b) $(6x+8)(4x+8)$ c) $-24x^2-80x-64$

④ Une expression développée de $3(x+1)^2-3$ est :

a) $3x^2+3x$ b) $3x^2+6x$ c) $3x(x+2)$

⑤ Une expression égale à $3(x+1)\left(-x+\frac{5}{3}\right)-5$ est :

a) $-3x^2+2x$ b) $-3x^2+2x-10$ c) $x(3x+2)$

Partie B **Compléter les égalités suivantes de sorte qu'elles soient vérifiées pour tout nombre réel x.**

1) $(x+1)^2=x^2+2x+1$ 2) $(2x-4)^2=4x^2-16x+16$

3) $(x-7)^2=x^2-14x+49$ 4) $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=x^2-7$

5) $9x^2+3x+\frac{1}{4}=\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2$ 6) $(3-10x)(3+10x)=9-100x^2$.

Exercice 5

1) Développer puis réduire : $A=(3x-5)(x+1)-(x+1)^2$.

$A=3x^2+3x-5x-5-(x^2+2x+1)=3x^2-2x-5-x^2-2x-1=2x^2-4x-6$

2) Factoriser $B = (-3x-4)^2 - (x+1)(-3x-4)$.
$B = (-3x-4)[(-3x-4)-(x+1)] = (-3x-4)[-3x-4-x-1] = (-3x-4)[-4x-5]$

3) Factoriser les expressions suivantes : $C = x^2 - 49$; $D = x^2 - 8x + 16$; $E = x^2 - 5x$.
$C = x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x-7)(x+7)$; $D = x^2 - 2 \times 4x + 4^2 = (x-4)^2$; $E = x(x-5)$

4) Montrer que pour tout réel x, on a : $(4x-1)^2 - 2x^2 = 14x^2 - 8x + 1$.
Je développe le membre de gauche :
$(4x-1)^2 - 2x^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 - 2x^2 = 16x^2 - 8x + 1 - 2x^2 = 14x^2 - 8x + 1$

5) Montrer que pour tout réel x, on a : $(2x-3)^2 - (5x+1)^2 = (7x-2)(-3x-4)$.
Je factorise le membre de gauche :
$(2x-3)^2 - (5x+1)^2 = [(2x-3)-(5x+1)] \times [(2x-3)+(5x+1)]$
$(2x-3)^2 - (5x+1)^2 = [2x-3-5x-1] \times [2x-3+5x+1]$
$(2x-3)^2 - (5x+1)^2 = [-3x-4] \times [7x-2]$

Exercice 6

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) L'équation $2x - 1 = -3(x-2)$ admet pour solution un nombre rationnel positif.
$2x - 1 = -3x + 6 \Leftrightarrow 2x + 3x = 6 + 1 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ VRAI

2) L'équation $(2x+9)(4x-1) = 0$ admet pour unique solution le nombre $\frac{1}{4}$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul donc
$(2x+9)(4x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 9 = 0 \; ou \; 4x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x = -9 \; ou \; 4x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{-9}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$ donc S = $\left\{\frac{-9}{2} \; ; \; \frac{1}{4}\right\}$ FAUX

3) L'ensemble S des solutions de l'équation $x^2 - 6 = 0$ est $S = \{\sqrt{6}\}$.
$x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$
$\Leftrightarrow x - \sqrt{6} = 0 \; ou \; x + \sqrt{6} = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \; ou \; x = -\sqrt{6}$ donc S = $\{-\sqrt{6} \; ; \; \sqrt{6}\}$ FAUX

4) L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.
$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ or pour $x \in \mathbb{R}$, x^2 est un réel positif donc ne peut pas être égal à -1 VRAI

5) Les nombres – 3 et – 2 sont solutions de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$.
$(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$ et $(-2)^2 + (-2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4$ FAUX

6) L'équation $\frac{x^2-49}{-x+7} = 0$ a pour solutions $x = -7$ ou $x = 7$.
Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul.
$\frac{x^2-49}{-x+7} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 49 = 0$ et $x \neq 7$
Donc le nombre 7 ne peut pas être solution de cette équation !
L'équation a une seule solution $x = -7$ donc FAUX

OU On recherche de la valeur interdite du quotient : $-x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$
donc **7 est la valeur interdite**, ce n'est pas une solution de cette équation !

Exercice 6 Résolution d'équations et d'inéquations

1) Résoudre les équations suivantes :

$2-6x=0$; $3x+1=0$; $-4x-5=0$; $(3x-9)(-x-4)=0$; $\frac{7x-6}{-x+2}=0$; $\frac{x+4}{5x-2}=3$.

$2-6x=0$ $\Leftrightarrow\ 2=6x$ $\Leftrightarrow\ \frac{2}{6}=x$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ Ensemble des solutions S = $\left\{\frac{1}{3}\right\}$	$3x+1=0$ $\Leftrightarrow\ 3x=-1$ $\Leftrightarrow x=\frac{-1}{3}$ S = $\left\{\frac{-1}{3}\right\}$	$-4x-5=0$ $\Leftrightarrow -4x=5$ $\Leftrightarrow x=\frac{5}{-4}$ $\Leftrightarrow x=\frac{-5}{4}$ S = $\left\{\frac{-5}{4}\right\}$	$(3x-9)(-x-4)=0$ $\Leftrightarrow 3x-9=0\ ou\ -x-4=0$ $\Leftrightarrow\ 3x=9\ \ ou\ \ -4=x$ $\Leftrightarrow\ \ x=\frac{9}{3}$ ou $x=-4$ S = $\{-4\ ;\ 3\}$
$\frac{7x-6}{-x+2}=0$ $\Leftrightarrow 7x-6=0\ et -x+2\neq 0$ $\Leftrightarrow 7x=6\ et\ 2\neq x$ $\Leftrightarrow x=\frac{6}{7}\ \ et\ x\neq 2$ S = $\left\{\frac{6}{7}\right\}$		$\frac{x+4}{5x-2}=3$ $\Leftrightarrow \frac{x+4}{5x-2}-3=0$ $\Leftrightarrow \frac{x+4-3(5x-2)}{5x-2}=0$ $\Leftrightarrow \frac{x+4-15x+6}{5x-2}=0$ $\Leftrightarrow \frac{-14x+10}{5x-2}=0$ $\Leftrightarrow -14\,x+10=0\ et\ 5x-2\ \neq 0$ $\Leftrightarrow x=\frac{-10}{-14}\ et\ x\neq\frac{2}{5}$ $\Leftrightarrow x=\frac{5}{7}\ \ et\ x\neq\frac{2}{5}$ S = $\left\{\frac{5}{7}\right\}$	

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$4x-7<0$; $9x+7>0$; $-2x-3\leq 0$; $1-7x\geq 0$; $(2x-3)(-x+6)\geq 0$; $x^2\leq 4$.

$4x-7<0$ $\Leftrightarrow\ 4x\ <7$ $\Leftrightarrow\ x\ <\frac{7}{4}$ S = $\left]-\infty;\frac{7}{4}\right[$	$9x+7>0$ $\Leftrightarrow\ 9x>-7$ $\Leftrightarrow\ x>\frac{-7}{9}$ S = $\left]\frac{-7}{9}\ ;+\infty\right[$	$-2x-3\leq 0$ $\Leftrightarrow -3\leq 2x$ $\Leftrightarrow\ \frac{-3}{2}\leq x$ $\Leftrightarrow x\ \geq\frac{-3}{2}$ S $=\left[\frac{-3}{2}\ ;+\infty\right[$	$1-7x\geq 0$ $\Leftrightarrow 1\geq 7x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{7}\geq x$ $\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{7}$ S = $\left]-\infty;\frac{1}{7}\right]$

$(2x-3)(-x+6)<\mathbf{0}$ → *on dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation*

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		6		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-3)(-x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup\,]6;+\infty[$

$x^2 \leq 4 \iff x^2 - 4 \leq 0$ *on factorise*

$\iff (x-2)(x+2) \leq 0$ *on dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation*

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-2; 2]$

Rq) On peut aussi utiliser le cours sur la fonction carrée : $x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$

3) Résoudre les inéquations suivantes : $\frac{-3x+1}{x+2} \leq 0$; $\frac{x+1}{4x-1} > 1$.

- $\frac{-3x+1}{x+2} \leq 0$ *on dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation*

Le quotient n'est pas défini lorsque : $x+2=0 \iff x=-2$ donc -2 est la **valeur interdite** du quotient.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-3x+1}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

- $\frac{x+1}{4x-1} > 1$

$\iff \frac{x+1}{4x-1} - 1 > 0$

$\iff \frac{x+1-(4x-1)}{4x-1} > 0$

$\iff \frac{x+1-4x+1}{4x-1} > 0$

$\iff \frac{-3x+2}{4x-1} > 0$ *on dresse un tableau de signes pour résoudre cette inéquation*

Le quotient n'est pas défini lorsque : $4x-1=0 \iff x = \frac{1}{4}$ donc $\frac{1}{4}$ est la **valeur interdite** du quotient.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$		$-$	
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-3x+2}{4x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S = \left]\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right[$

Exercice 7

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 2(x+3)^2 - 8$.
Un logiciel de calcul formel nous donne ses formes développée et factorisée.
En utilisant à chaque fois la forme la mieux adaptée :

	$f(x) = 2(x+3)^2 - 8$
	$g(x) = \text{Développer}(f(x))$ $= 2x^2 + 12x + 10$
	$h(x) = \text{Factoriser}(f(x))$ $= 2(x+1)(x+5)$

1) Calculer $f(-5)$: *forme factorisée*

   $\boldsymbol{f(-5) = 2(-5+1)(-5+5) = 2 \times (-4) \times 0 = 0}$

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$: *forme factorisée*

   $f(x) = 0 \iff 2(x+1)(x+5) = 0$ *on divise par 2 les deux membres*
   $\iff (x+1)(x+5) = 0$
   $\iff (x+1) = 0 \ \ ou \ \ (x+5) = 0$
   $\iff x = -1 \ \ ou \ \ x = -5$

   $S = \{-5; -1\}$

3) Résoudre l'équation $f(x) = -8$; *forme initiale*

   $2(x+3)^2 - \cancel{8} = -\cancel{8} \iff 2(x+3)(x+3) = 0$
   $\iff (x+3)(x+3) = 0$
   $\iff x + 3 = 0$
   $\iff x = -3$

   $S = \{-3\}$

4) Résoudre l'équation $f(x) = 10$; *forme développée*

   $2x^2 + 12x + \cancel{10} = \cancel{10} \iff 2x^2 + 12x = 0$
   $\iff 2x(x+6) = 0$
   $\iff 2x = 0 \ \ ou \ \ (x+6) = 0$
   $\iff x = 0 \ \ ou \ \ x = -6$

   $S = \{-6; 0\}$

5) Calculer $f(\sqrt{2})$. *forme développée*

   $f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 + 12\sqrt{2} - 10 = 2 \times 2 + 12\sqrt{2} - 10 = 12\sqrt{2} - 6$

Exercice 8

On définit en Python la fonction **f** de paramètre le flottant x.

```
def f(x):
    a=5*x-2
    b=4*x*x
    c=a**2-b
    return c
```

1) Quelle est la valeur renvoyée par l'appel **f**(2) ?
   x prend la valeur 2 dans l'algorithme donc :
   $a = 5 \times 2 - 2 = 10 - 2 = 8$
   $b = 4 \times 2 \times 2 = 16$
   $c = 8^2 - 16 = 64 - 16 = 48$

   La valeur renvoyée est : 48

2) On assimile cette fonction **f** définie en Python à une fonction numérique f. Déterminer l'expression de f en fonction de x.
   $a = 5 \times x - 2 = 5x - 2$
   $b = 4 \times x \times x = 4x^2$
   $c = (5x-2)^2 - 4x^2$ Donc on obtient la fonction f définie par $f(x) = (5x-2)^2 - 4x^2$

3) Montrer qu'une expression développée de f est : $f(x) = 21x^2 - 20x + 4$. *On développe*

   $f(x) = (5x-2)^2 - 4x^2 = 25x^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2 - 4x^2 = 21x^2 - 20x + 4$

4) Montrer qu'une expression factorisée de f est : $f(x) = (3x-2)(7x-2)$.

   $f(x) = (5x-2)^2 - 4x^2 = (5x-2)^2 - (2x)^2 = (5x-2-2x)(5x-2+2x) = (3x-2)(7x-2)$

5) En utilisant la forme la plus adaptée :
   a) Retrouver le résultat de la question 1) : $f(2) = 21 \times 2^2 - 20 \times 2 + 4 = 21 \times 4 - 40 + 4 = 48$

b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$: $(3x-2)(7x-2) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{7}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$7x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(3x-2)(7x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]\frac{2}{7}; \frac{2}{3}\right[$$

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 4$:

$21x^2 - 20x + 4 \leq 4 \iff 21x^2 - 20x \leq 0$

$\iff x(21x - 20) \leq 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{20}{21}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$21x-20$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x(21x-20)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left[0; \frac{20}{21}\right]$$

II Pour réviser les notions importantes de seconde

Sens de variation des fonctions de référence

Exercice 9 Comparer des images

a) Si $a \leq b \leq -1$, comparer a^2 et b^2 en justifiant.

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$ donc elle ne conserve pas l'ordre :

$a^2 \geq b^2 \geq 1^2$ soit $a^2 \geq b^2 \geq 1$

b) Si $a \leq b \leq -1$, comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ en justifiant.

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ donc elle ne conserve pas l'ordre :

$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{-1}$ soit $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq -1$

c) Si $a \geq b \geq 2$, comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ en justifiant.

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc elle ne conserve pas l'ordre : $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

d) Si $a \geq b \geq 2$, comparer a^3 et b^3 en justifiant.

La fonction cube est croissante sur $]-\infty; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre :

$a^3 \geq b^3 \geq 2^3$ soit $a^3 \geq b^3 \geq 8$

e) Si $a \geq b \geq 4$, comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ en justifiant.

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre :

$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq \sqrt{4}$ soit $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq 2$

Exercice 10 Différentes formes d'une même expression et leur utilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)^2 - 25$.

1) Déterminer la forme développée de $f(x)$.

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 25 = 4x^2 - 12x - 16$

2) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ où $a = (2x-3)$ et $b = 5$.

$f(x) = (2x-3)^2 - 5^2 = (2x-3-5)(2x-3+5) = (2x-8)(2x+2)$

3) Quelle forme de $f(x)$ utiliser pour répondre aux questions suivantes :

a) Calculer l'image de 0 par f. Combien vaut-elle ?

Forme développée $f(0) = 4 \times 0^2 - 12 \times 0 - 16 = -16$

b) Déterminer les antécédents de 0 par f. Quels sont-ils ?

Forme factorisée → $f(x) = (2x-8)(2x+2)$

Pour déterminer les antécédents de 0, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

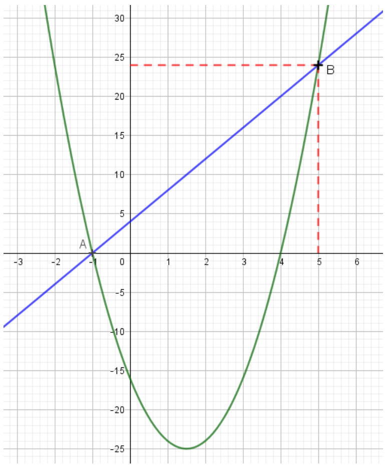
On résout l'équation produit nul : $(2x-8)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \text{ ou } 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 8 \text{ ou } 2x = -2$

$\Leftrightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \text{ ou } x = \frac{-2}{2} = -1$

Donc, les antécédents de O sont -1 et 4.

4) *Lectures graphiques* : on a tracé la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On a aussi tracé une droite (AB) représentative d'une fonction affine notée g définie sur $\mathbb{R}$.



a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$1{,}5$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-25	↗ $+\infty$

b) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$ puis l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Les deux courbes représentatives de f et g se coupent en deux points A$(-1\,;0)$ et $B(5\,;24)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est $S = \{-1\,;5\}$

Résolution graphique de l'inéquation : $f(x) < g(x)$.

On observe que la courbe représentative de f est en dessous de la courbe représentative de g sur $]-1\,;5[$.

c) Lire le coefficient directeur de la droite (AB) puis déterminer par le calcul son ordonnée à l'origine. Déterminer l'expression de la fonction g.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{24-0}{5-(-1)} = \frac{24}{6} = 4$.

La droite (AB) a pour équation réduite $y = mx + p$ où $m = 4$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine p, sachant que A appartient à la droite (AB) alors ses coordonnées vérifient l'équation de la droite : $y_A = 4x_A + p \Leftrightarrow 0 = 4 \times (-1) + p \Leftrightarrow \boxed{p = 4}$

En conclusion, l'expression de la fonction g est $\boxed{g(x) = 4x + 4}$

5) Par le calcul, retrouver les résultats des questions 4b) et 4)c)

Résolvons l'équation : $f(x) = g(x)$

$(2x-8)(2x+2) = 4x+4$ $(2x-8)(2x+2) = 2(2x+2)$ $(2x-8)(2x+2) - 2(2x+2) = 0$ $(2x+2)[(2x-8)-2] = 0$ $(2x+2)[2x-10] = 0$	On reconnait une équation produit nul donc : $2x+2=0 \quad ou \quad 2x-10=0$ $\Leftrightarrow \ x=-1 \quad ou \quad 2x=10$ $\Leftrightarrow \ x=-1 \quad ou \quad x=5$ $S = \{-1; 5\}$

Résolvons l'inéquation : $f(x) < g(x)$

$(2x-8)(2x+2) < 4x+4$

$\Leftrightarrow \ (2x-8)(2x+2) < 2(2x+2)$

$\Leftrightarrow \ (2x-8)(2x+2) - 2(2x+2) < 0$

$\Leftrightarrow \ (2x+2)[(2x-8)-2] < 0$

$\Leftrightarrow \ (2x+2)[2x-10] < 0$ *On aurait pu reprendre directement l'expression trouvée précédemment !*

On utilise un tableau de signes pour résoudre cette inéquation.

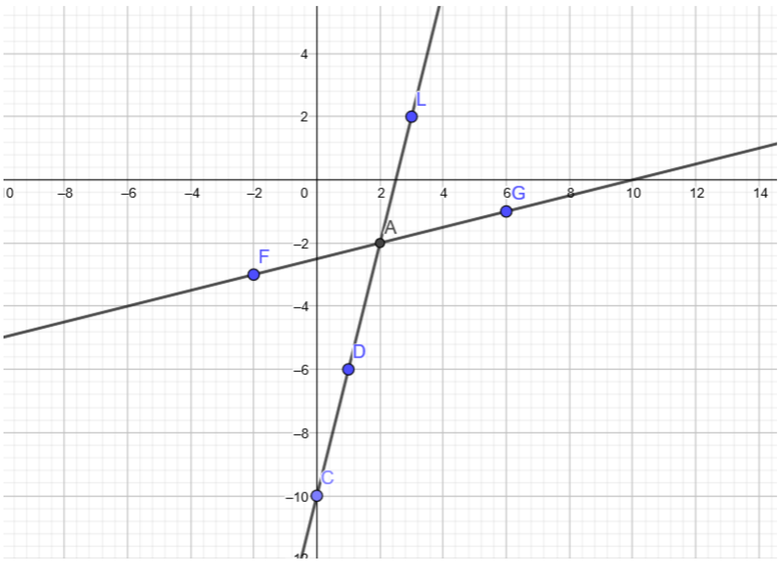
x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+2)(2x-10)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

S = $]-1; 5[$

Exercice 11

Dans un repère orthonormé, on considère les points $F(-2\,;-3)$, $L(3\,;2)$ et $G(6\,;-1)$.

1) Faire une figure.



2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{LG}$ puis la distance LG.

$\overrightarrow{LG}(x_G - x_L; y_G - y_L)$ donc $\overrightarrow{LG}(3; -3)$

$LG = \sqrt{x^2+y^2}$ donc $LG = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = \sqrt{9}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

3) Soit M un point de l'axe des abscisses. Déterminer la valeur de son abscisse pour que les vecteurs $\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{MF}$ soient colinéaires.

M est sur l'axe des abscisses donc son ordonnée est nulle, il a pour coordonnées $M(x\,;0)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{MF}$ sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est nul.

On calcule le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{MF}$ avec $\overrightarrow{LG}(3;-3)$ et $\overrightarrow{MF}(-2-x;-3)$, égal à 0.

$$det(\overrightarrow{LG},\overrightarrow{MF}) = 3(-3)-(-3)(-2-x) = -9+3(-2-x) = -9-6-3x = -3x-15$$

$$det(\overrightarrow{LG},\overrightarrow{MF}) = 0 \iff -3x-15 = 0$$

$$\iff -3x = 15$$

$$\iff x = \frac{15}{-3} = -5$$

Donc l'abscisse du point M est – 5 .

4) Déterminer l'équation réduite de la droite (GF).

La droite (GF) a pour équation réduite $y = mx + p$ où $m = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{-1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Pour trouver l'ordonnée à l'origine p, les coordonnées du point G vérifient l'équation de la droite (GF) :

$$y_G = \frac{1}{4}x_G + p \iff -1 = \frac{1}{4}\times 6 + p \iff \boxed{p = -\frac{5}{2}}$$

En conclusion, l'expression de l'équation réduite de la droite (GF) est $\boxed{y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}}$.

5) Tracer la droite Δ d'équation cartésienne : $4x - y - 10 = 0$ et expliquer la méthode utilisée.

Pour tracer une droite, il suffit de connaitre les coordonnées de deux points.

A partir de l'équation cartésienne on peut obtenir l'équation réduite de la droite Δ, on obtient : $y = 4x - 10$.

Ensuite, si on prend $x = 0$ on trouve $y = -10$ donc le point $C(0\,;-10)$ est sur Δ.

Et si on prend $x = 1$ on trouve $y = 4\times 1 - 10 = -6$ donc le point $D(1\,;-6)$ est sur Δ.

On trace la droite Δ passant par les deux points $C(0\,;-10)$ et $D(1\,;-6)$.

6) Lire les coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ.

Les coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ sont $(2\,;-2)$.

7) Résoudre par le calcul le système suivant : $\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases}$. Que retrouve-t-on ? Est-ce normal ?

Méthode par substitution

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$ *on exprime y en fonction de x dans la 1ère équation*

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - (\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}) = 10 \end{cases}$$ *on substitue y dans la 2ème équation*

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ 4x - \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} = 10 \end{cases}$$ *on simplifie la 2ème équation*

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ \frac{16}{4}x - \frac{1}{4}x = \frac{20}{2} - \frac{5}{2} \end{cases}$$ *on regroupe les x dans la 2ème équation*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ \frac{15}{4}x = \frac{15}{2} \end{cases}$$ après simplification on obtient

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = y \\ x = \frac{15}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$ après simplification on obtient

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \times 2 - \frac{5}{2} = y \\ x = 2 \end{cases}$$ on remplace x dans la 1ère équation pour trouver y

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \times 2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$ on remplace x dans la 1ère équation pour trouver y

Méthode par combinaison linéaire

Je veux éliminer les « y » en additionnant membre à membre deux équations transformées

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - y = \frac{5}{2} & \times(-1) \\ 4x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x + y = -\frac{5}{2} \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$ *on additionne termes à termes*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x + y + 4x - y = -\frac{5}{2} + 10 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$ *on a repris la 2ème équation*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{4}x = \frac{15}{2} \\ 4x - 10 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{2} \times \frac{4}{15} \\ 4x - 10 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4 \times 2 - 10 = y \end{cases}$$

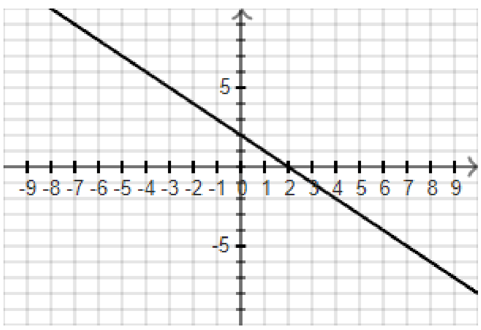
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -2 = y \end{cases}$$

La solution du système est le couple $(2\,;-2)$ ce qui correspond aux coordonnées du point d'intersection des droites (GF) et Δ.

Dans le système à 2 équations, chaque équation correspond à une autre écriture des équations de (GF) et Δ.

Exercice 13 Notions d'équations de droites

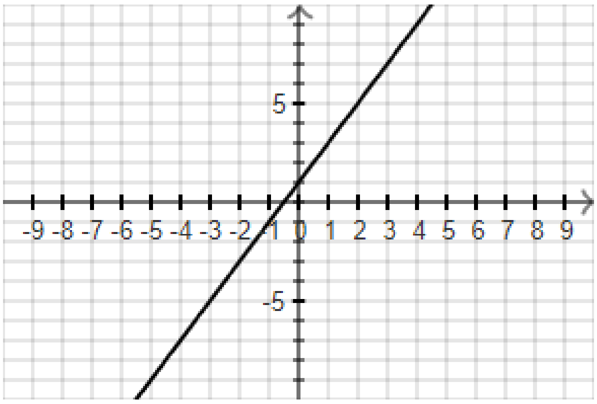
1) Trouver par lecture graphique le coefficient directeur de la droite tracée ci-dessous.



En prenant les points $A(0;2)$ et $B(2;0)$, on a alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

2) Trouver par lecture graphique l'ordonnée à l'origine de la droite tracée ci-dessous



Soit le point $C(0;1)$, on sait que l'ordonnée du point C est l'ordonnée à l'origine de la droite, alors $p = 1$.

3) Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à la droite Δ dont une équation cartésienne est : $3x + y + 5 = 0$?

$$A(2;-11) \quad ; \quad B(-2;1) \quad ; \quad C(4;-17) \quad ; \quad D(4;-12)$$

On teste si les coordonnées de chacun des points A, B, C et D vérifient l'équation cartésienne de la droite.

A → $3x_A + y_A + 5 = 3 \times 2 - 11 + 5 = 0$ donc $A \in \Delta$
B → $3x_B + y_B + 5 = 3 \times (-2) + 1 + 5 = 0$ donc $B \in \Delta$
C → $3x_C + y_C + 5 = 3 \times 4 - 17 + 5 = 0$ donc $C \in \Delta$
D → $3x_D + y_D + 5 = 3 \times 4 - 12 + 5 = 5 \neq 0$ donc $D \notin \Delta$

Donc A, B et C sont sur la droite Δ d'équation réduite $y = -3x - 5$

4) Soit $A(-9;6)$ et $B(7;-9)$ deux points repérés dans un repère orthonormé.
Donner une équation réduite puis une équation cartésienne de la droite (AB).

Equation réduite de (AB)

- $x_A \neq x_B$ donc la droite (AB) a une équation réduite de la forme : $y = mx + p$
- Calcul du coefficient directeur de la droite (AB) : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-9-6}{7+9} = \frac{-15}{16}$
- Calcul de l'ordonnée à l'origine :
  La droite (AB) a une équation réduite de la forme $y = \frac{-15}{16}x + p$
  Pour trouver p, les coordonnées du point A$(-9;6)$ vérifient l'équation de cette droite soit :

$$y_A = \frac{-15}{16}x_A + p \iff 6 = \frac{-15}{16} \times (-9) + p$$
$$\iff 6 - \frac{135}{16} = p$$
$$\iff -\frac{39}{16} = p$$

L'équation réduite de (AB) est : $y = \frac{-15}{16}x - \frac{39}{16}$

Equation cartésienne de (AB)

Soit M$(x;y)$ un point de la droite (AB) alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc leur déterminant est nul.

$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x_M - x_A; y_M - y_A)$ soit $(x+9; y-6)$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ soit $(16;-15)$

$det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$ et $det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = xy' - x'y = (x+9) \times (-15) - 16(y-6)$

On obtient alors : $(x+9) \times (-15) - 16(y-6) = 0$ soit, en développant, $-15x - 16y - 39 = 0$.

Une équation cartésienne de (AB) est : $-15x - 16y - 39 = 0$.

III Pour démarrer les révisions en jouant ….

SUDOKU avec CALCUL LITTERAL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	6	9	4	5	3	8	7	2
2	3	4	7	8	9	2	6	5	1
3	2	8	5	6	7	1	4	3	9
4	9	7	1	5	8	6	2	4	3
5	5	3	8	9	2	4	7	1	6
6	6	2	4	1	3	7	9	8	5
7	4	9	6	3	1	8	5	2	7
8	7	5	3	2	4	9	1	6	8
9	8	1	2	7	6	5	3	9	4

SUDOKU avec FONCTIONS et EQUATIONS DE DROITES

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	**−4**	0	4	1	**−1**	−2	2	3	−3
B	−3	−1	2	3	−4	0	4	−2	1
C	1	−2	3	4	2	−3	**−1**	0	−4
D	0	**3**	1	−3	−2	4	−4	2	−1
E	−1	−3	−2	**−4**	3	2	0	1	**4**
F	2	4	−4	0	1	−1	−2	−3	3
G	−2	1	−1	2	4	3	−3	**−4**	0
H	4	−4	−3	−2	0	**1**	3	−1	2
I	3	2	**0**	−1	−3	−4	1	4	−2

SUDOKU avec EQUATIONS DE DROITES et SYSTEMES D'EQUATIONS

4	7	1	6	3	9	5	8	2
9	2	6	4	8	5	7	1	3
5	8	3	1	2	7	4	9	6
2	6	9	5	4	3	8	7	1
1	3	4	8	7	6	2	5	9
8	5	7	2	9	1	3	6	4
3	4	5	9	6	8	1	2	7
7	9	8	3	1	2	6	4	5
6	1	2	7	5	4	9	3	8

SUDOKU avec FONCTIONS, POURCENTAGES et EQUATIONS DE DROITES

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	6	2	5	9	7	1	4	8	3
2	8	1	7	2	4	3	9	6	5
3	9	3	4	6	5	8	7	1	2
4	3	7	9	1	2	4	8	5	6
5	5	8	6	3	9	7	2	4	1
6	2	4	1	5	8	6	3	9	7
7	7	9	2	4	6	5	1	3	8
8	4	6	3	8	1	2	5	7	9
9	1	5	8	7	3	9	6	2	4

Voilà ! Tu es prêt et tu vas réussir ton année de première !
Bonne continuation !