Corrigé Bilan : Suites

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n} + 5$

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 16$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{v_n} + 5$

1. Calculer à la main u_0, u_1, v_1 et v_2

   $u_0 = \sqrt{0} + 5$ $\quad u_1 = \sqrt{1} + 5$ $\quad v_1 = \sqrt{v_0} + 5$ $\quad v_2 = \sqrt{v_1} + 5$

   $u_0 = 5$ $\quad u_1 = 6$ $\quad v_1 = 9$ $\quad v_2 = 8$

2. Déterminer, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, les dix premiers termes de chacune des deux suites.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	5	16
3	1	6	9
4	2	6,41421356	8
5	3	6,73205081	7,82842712
6	4	7	7,79793265
7	5	7,23606798	7,79247787
8	6	7,44948974	7,79150101
9	7	7,64575131	7,79132603
10	8	7,82842712	7,79129469
11	9	8	7,79128907

3. Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer le terme de rang n de la suite (v_n).

   V ← 16
   Pour I allant de 1 à N
   | V ← $\sqrt{U}$ +5
   Fin Pour

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$

1. Montrer que $u_3 = -2$

   $u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 3$ $\quad u_2 = u_1 + 2 \times 1 - 3$ $\quad u_3 = u_2 + 2 \times 2 - 3$

   $u_1 = -2$ $\quad u_2 = -3$ $\quad u_3 = -2$

2. Démontrer que cette suite est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$

Or $2n - 3 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{2}$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$

La suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Exercice 3

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}2n^2 + n - 3$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f fonction polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 0{,}2x^2 + x - 3$

   $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $\quad \alpha = -\frac{5}{2}$

   $a > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

   La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{n+1}$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$.

   f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}^+$

   $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$

   $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

   La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$

   $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

   $u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}$

   $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

   Or $\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$

   La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2n - 5$

   Or $\forall\, n \in \mathbb{N}, -2n - 5 < 0$

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$

   La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2$

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n^2$

   Or $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

   La suite (u_n) est donc croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par la fonction Python ci-contre :

```python
def terme_u(n):
    u=0
    for k in range (1,n+1):
        u=5*u-1
    return u
```

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).

   $u_0 = 0,\ u_1 = -1,\ u_2 = -6\ \text{ et }\ u_3 = -31$
2. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

   La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

   $$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

Exercice 5

1. Déterminer quatre multiples de 3.

   $6;\ 18;\ 30$ et 42 sont des multiples de 3
2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel n, $(3n+1)^2 - 7$ est un multiple de 3.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}, (3n+1)^2 - 7 = 9n^2 + 6n - 6$

   $(3n+1)^2 - 7 = 3(3n^2 + 2n - 2)$

   $(3n+1)^2 - 7 = 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$

   Donc $(3n+1)^2 - 7$ est un multiple de 3.

Exercice 6

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -5.
   a. Donner la relation de récurrence vérifiée par (u_n), puis la formule explicite de (u_n).
   La suite (u_n) est définie par $u_0 = 48$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 5$
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 48 - 5n$
   b. Calculer u_5.
   $u_5 = 48 - 5 \times 5$; $u_5 = 23$
   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ avec f fonction affine définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 48 - 5x$
   $m < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
   La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Reprendre la question 1. en considérant cette fois la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = -2$ et de raison 3.
   a. La suite (v_n) est définie par $v_1 = -2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_{n+1} = 3v_n$
   $\forall\, n \geq 1, v_n = -2(3)^{n-1}$
   b. $v_5 = -2(3)^4$; $v_5 = -162$
   c. $\forall\, n \geq 1, v_{n+1} - v_n = -2(3)^n + 2(3)^{n-1}$
   $v_{n+1} - v_n = 2(3)^{n-1}(-3+1)$
   $v_{n+1} - v_n = -4(3)^{n-1}$
   Or $\forall\, n \geq 1, -4(3)^{n-1} < 0$
   Donc $\forall\, n \geq 1, v_{n+1} - v_n < 0$
   La suite (v_n) est donc strictement décroissante pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 3$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3

$u_1 = -2u_0 + 3$	$u_2 = -2u_1 + 3$	$u_3 = -2u_2 + 3$
$u_1 = -2 \times 6 + 3$	$u_2 = -2 \times (-9) + 3$	$u_3 = -2 \times 21 + 3$
$u_1 = -9$	$u_2 = 21$	$u_3 = -39$

   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
   $u_1 - u_0 = -15$ et $u_2 - u_1 = 30$
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique .
   $\frac{u_1}{u_0} = \frac{-3}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-7}{3}$
   $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 1$
   $v_{n+1} = -2u_n + 2$
   $v_{n+1} = -2(u_n - 1)$
   $v_{n+1} = -2v_n$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = 5$ $(v_0 = u_0 - 1)$
3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = 5 \times (-2)^n$
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1$
   $u_n = 5 \times (-2)^n + 1$

Exercice 8

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3(c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année).
   $u_2 = 1{,}02u_1$ $\qquad u_3 = 1{,}02u_2$
   $u_2 = 510$ $\qquad u_3 = 520{,}2$
   La prime versée par l'entreprise la 2ème année est de 510€, et la 3ème année de 520,20€
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
   $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1{,}02u_n$
   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_1 = 500$
3. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.

a. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année.
   (u_n) étant géométrique, $\forall\, n \geq 1,\ u_n = 500 \times (1{,}02)^{n-1}$
   Donc $u_{20} = 500 \times (1{,}02)^{19}$
   $u_{20} \approx 728{,}41$
   Après 20 ans passés dans l'entreprise, la prime touchée la 20ème année est de 728,41€

b. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années.
   $\forall\, n \geq 1,$

$$S = \sum_{i=1}^{20} u_i$$

$$S = 500 \times \sum_{i=1}^{20} (1{,}02)^{i-1}$$

$$S = 500 \times \frac{1 - 1{,}02^{20}}{1 - 1{,}02}$$

$$S = -25000 \times (1 - 1{,}02^{20})$$

$$S \approx 12148{,}68$$

Les primes touchées sur les 20 années est de 12148,68€

Exercice 9

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$

Affirmation 1 : La suite (t_n) est une suite géométrique.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = u_{n+1} - 5$
$t_{n+1} = 2u_n - 10$
$t_{n+1} = 2(u_n - 5)$
$t_{n+1} = 2t_n$

La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme $t_0 = 9$ $(t_0 = u_0 - 5)$ Affirmation vraie

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

(t_n) étant géométrique, $\forall\, n \in \mathbb{N}, t_n = 9 \times 2^n$
$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = t_n + 5$
$u_n = 9 \times 2^n + 5$ $\qquad$ Affirmation vraie

L'affirmation qui suit est indépendante des deux précédentes.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\cdots+(8\times n+3)=n(4n+7)$$

$\forall\, n\geq 1,$ $\quad S=(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\cdots+(8\times n+3)$

$$S=\sum_{i=1}^{n}(8\times i+3)$$
$$S=\sum_{i=1}^{n}3+8\times\sum_{i=1}^{n}i$$
$$S=3n+8\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S=3n+4n(n+1)$$
$$S=n(3+4n+4)$$
$$S=n(4n+7)$$

Affirmation vraie

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=2u_n+2n^2-n$.
Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$v_n=u_n+2n^2+3n+5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?
C2 = B2+2*A2^2+3*A2+5 et B3 = =2*B2+2*A2^2-A2

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

La suite (v_n) semble géométrique de raison 2 et de 1er terme $v_0=7$
Démontrons que (v_n) est géométrique :

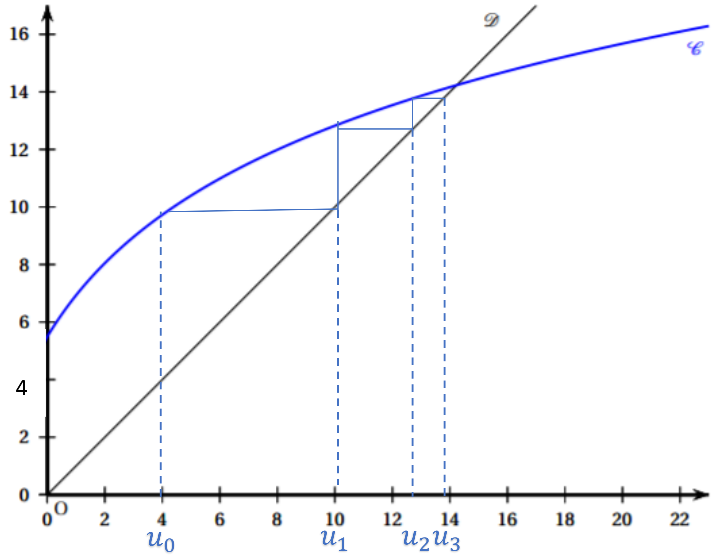
$\forall\, n\in\mathbb{N}, v_{n+1}=u_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1)+5$
$v_{n+1}=2u_n+2n^2-n+2(n^2+2n+1)+3n+3+5$
$v_{n+1}=2u_n+2n^2-n+2n^2+4n+2+3n+8$
$v_{n+1}=2u_n+4n^2+6n+10$
$v_{n+1}=2(u_n+2n^2+3n+5)$
$v_{n+1}=2v_n$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de 1er terme $v_0=7$ $\quad(v_0=u_0+5)$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n)\ pour\ tout\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$ avec f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ dont la courbe représentative (C) est représentée ci-dessous.

1. Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessous les termes u_0,u_1,u_2 et u_3 de la suite (u_n) en utilisant la droite d'équation $y=x$ et la courbe (C) et en laissant apparaitre les traits de construction.



2. Conjecturer le sens de variation et la limite de de la suite (u_n).

La suite (u_n) semble croissante et converger vers 14,5.

Exercice 12

On considère la suite arithmétique (u_n) dont le terme de rang n s'obtient grâce à l'algorithme ci-contre.

```python
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
    return(u)
```

1. a. Préciser le premier terme u_0 et la raison.

D'après l'algorithme, $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$

Donc la raison r est telle que $r = 4$

b. En déduire la formule explicite de u_n.

La suite (u_n) étant arithmétique, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 + 4n$

2. a. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 1000$.

$u_n \geq 1000$ équivaut successivement à

$10 + 4n \geq 1000$

$4n \geq 990$

$n \geq 247{,}5$

Donc $u_n \geq 1000$ à partir du rang 248.

b. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde à la question 2.a.

```python
n=0
u=10
while u<1000:
        n=n+1
        u=u+4
print ('n=',n)
```

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Ecrire une fonction Python de paramètre n qui retourne sous forme de liste les n premiers termes de la suite (u_n).

```python
from math import *
def listesuite(n):
    u=1
    L=[u]
    for i in range (1,n+1):
        u=sqrt(2*u)
        L.append(u)
    return L
```

2. Emettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

La suite (u_n) semble converger vers 2

Exercice 14

On doit à Fibonacci, mathématicien italien du XIIIe siècle le problème suivant.

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu clos. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n comme le nombre de couples présents le n-ième mois. On pose $u_0 = 0$, on a donc $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Compléter la fonction Python ci-contre pour retourner la liste des termes de la suite de u_0 à u_n.

```python
def fibonacci (n):
    a=0;b=1;L=[a]
    for i in range (1,1+n):
        c=a+b
        a=b
        b=c
        L.append(a)
    return(L)
```

2. Déterminer à l'aide de ce programme fibonacci(12).
   Que représente fibonacci(12) dans le contexte du problème posé par Fibonacci ?

```
>>> fibonacci(12)
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144]
```

Il y aura 144 couples en un an.

Exercice 15

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En préciser les éléments caractéristiques.
   (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1er terme $v_0 = 1$
2. Donner, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. Calculer la somme S des dix premiers termes de la suite (v_n).

$$S = \sum_{i=0}^{9} \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$S = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$S = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$$

$$S = 3\left(1 - \frac{1024}{59049}\right)$$

$$S = 3 \times \frac{58025}{59049}$$

$$S = \frac{58025}{19683}$$

Partie B. On modélise une suite (w_n) à l'aide de la fonction suivante écrite en langage Python :

```python
def terme(n):
    w = 4
    for i in range(n):
        w = 2*w - 3
    return w
```

4. Que renvoie l'exécution de `terme(5)` ?

```
>>> terme(5)
35
```

5. En s'inspirant de la fonction `terme(n)`, proposer une fonction `somme_termes(n)`, écrite en langage Python, qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite (w_n).

```python
def somme_terme(n):
    w=4
    S=4
    for i in range (1,n):
        w=2*w-3
        S=S+w
    return S
```