

Corrigé Bilan : Suites

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n} + 5$

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 16$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{v_n} + 5$

1. Calculer à la main u_0, u_1, v_1 et v_2

$$\begin{array}{llll} u_0 = \sqrt{0} + 5 & u_1 = \sqrt{1} + 5 & v_1 = \sqrt{v_0} + 5 & v_2 = \sqrt{v_1} + 5 \\ u_0 = 5 & u_1 = 6 & v_1 = 9 & v_2 = 8 \end{array}$$

2. Déterminer, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, les dix premiers termes de chacune des deux suites.

3. Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer le terme de rang n de la suite (v_n) .

```

V ← 16
Pour I allant de 1 à N
    V ← √V + 5
Fin Pour
    
```

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	5	16
3	1	6	9
4	2	6,41421356	8
5	3	6,73205081	7,82842712
6	4	7	7,79793265
7	5	7,23606798	7,79247787
8	6	7,44948974	7,79150101
9	7	7,64575131	7,79132603
10	8	7,82842712	7,79129469
11	9	8	7,79128907

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$

1. Montrer que $u_3 = -2$

$$\begin{array}{lll} u_1 = u_0 + 2 \times 0 - 3 & u_2 = u_1 + 2 \times 1 - 3 & u_3 = u_2 + 2 \times 2 - 3 \\ u_1 = -2 & u_2 = -3 & u_3 = -2 \end{array}$$

2. Démontrer que cette suite est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$

Or $2n - 3 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{3}{2}$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 2$

La suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

Exercice 3

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. Pour tout entier naturel n , $u_n = 0,2n^2 + n - 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f fonction polynôme du 2nd degré définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 0,2x^2 + x - 3$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \alpha = -\frac{5}{2}$$

$a > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3}{n+1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec f fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$.

f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n}{n+1}$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$
- $$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$
- $$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)}$$
- $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$
- Or $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$
- La suite (u_n) est donc strictement croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2n - 5$$
- Or $\forall n \in \mathbb{N}, -2n - 5 < 0$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$
- La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + n^2$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n^2$$
- Or $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$
- Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- La suite (u_n) est donc croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par la fonction Python ci-contre :

- Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
 $u_0 = 0, u_1 = -1, u_2 = -6$ et $u_3 = -31$
- Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) .
 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

```
1 def terme_u(n):
2     u=0
3     for k in range (1,n+1):
4         u=5*u-1
5     return u
```

Exercice 5

- Déterminer quatre multiples de 3.
 $6; 18; 30$ et 42 sont des multiples de 3
- Montrer que, quel que soit l'entier naturel n , $(3n + 1)^2 - 7$ est un multiple de 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3n + 1)^2 - 7 = 9n^2 + 6n - 6$$

$$(3n + 1)^2 - 7 = 3(3n^2 + 2n - 2)$$

$$(3n + 1)^2 - 7 = 3k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $(3n + 1)^2 - 7$ est un multiple de 3.

Exercice 6

- On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -5 .
 - Donner la relation de récurrence vérifiée par (u_n) , puis la formule explicite de (u_n) .
 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 48$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 5$
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 48 - 5n$
 - Calculer u_5 .
 $u_5 = 48 - 5 \times 5 ; u_5 = 23$
 - Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ avec f fonction affine définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 48 - 5x$
 $m < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$
 La suite (u_n) est donc strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Reprendre la question 1. en considérant cette fois la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = -2$ et de raison 3.
 - La suite (v_n) est définie par $v_1 = -2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_{n+1} = 3v_n$
 $\forall n \geq 1, v_n = -2(3)^{n-1}$
 - $v_5 = -2(3)^4 ; v_5 = -162$
 - $\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = -2(3)^n + 2(3)^{n-1}$
 $v_{n+1} - v_n = 2(3)^{n-1}(-3 + 1)$
 $v_{n+1} - v_n = -4(3)^{n-1}$
 Or $\forall n \geq 1, -4(3)^{n-1} < 0$
 Donc $\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n < 0$
 La suite (v_n) est donc strictement décroissante pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 3$

- Calculer u_1, u_2 et u_3

$u_1 = -2u_0 + 3$	$u_2 = -2u_1 + 3$	$u_3 = -2u_2 + 3$
$u_1 = -2 \times 6 + 3$	$u_2 = -2 \times (-9) + 3$	$u_3 = -2 \times 21 + 3$
$u_1 = -9$	$u_2 = 21$	$u_3 = -39$
 - La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
 $u_1 - u_0 = -15$ et $u_2 - u_1 = 30$
 $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique .
 $\frac{u_1}{u_0} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{21}{-9} = -\frac{7}{3}$
 $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.
- On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1$
 Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2 .
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 1$
 $v_{n+1} = -2u_n + 3 - 1$
 $v_{n+1} = -2(u_n - 1)$
 $v_{n+1} = -2v_n$
 Donc la suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = 5$ ($v_0 = u_0 - 1$)
- En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 5 \times (-2)^n$
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1$
 $u_n = 5 \times (-2)^n + 1$

Exercice 8

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.

On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2^{ème} année et la 3^{ème} année).

$$u_2 = 1,02u_1$$

$$u_3 = 1,02u_2$$

$$u_2 = 510$$

$$u_3 = 520,2$$

La prime versée par l'entreprise la 2^{ème} année est de 510€, et la 3^{ème} année de 520,20€

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,02u_n$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_1 = 500$

3. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.

- a. Calculer la prime qu'il touchera la 20^{ème} année.

(u_n) étant géométrique, $\forall n \geq 1, u_n = 500 \times (1,02)^{n-1}$

$$\text{Donc } u_{20} = 500 \times (1,02)^{19}$$

$$u_{20} \approx 728,41$$

Après 20 ans passés dans l'entreprise, la prime touchée la 20^{ème} année est de 728,41€

- b. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années.

$$\forall n \geq 1,$$

$$S = \sum_{i=1}^{20} u_i$$

$$S = 500 \times \sum_{i=1}^{20} (1,02)^{i-1}$$

$$S = 500 \times \frac{1 - 1,02^{20}}{1 - 1,02}$$

$$S = -25000 \times (1 - 1,02^{20})$$

$$S \approx 12148,68$$

Les primes touchées sur les 20 années est de 12148,68€

Exercice 9

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$

Affirmation 1 : La suite (t_n) est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = u_{n+1} - 5$$

$$t_{n+1} = 2u_n - 10$$

$$t_{n+1} = 2(u_n - 5)$$

$$t_{n+1} = 2t_n$$

La suite (t_n) est une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $t_0 = 9$ ($t_0 = u_0 - 5$) Affirmation vraie

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

(t_n) étant géométrique, $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 9 \times 2^n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = t_n + 5$$

$$u_n = 9 \times 2^n + 5$$

Affirmation vraie

L'affirmation qui suit est indépendante des deux précédentes.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \dots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$$

$\forall n \geq 1,$

$$S = (8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \dots + (8 \times n + 3)$$

$$S = \sum_{i=1}^n (8 \times i + 3)$$

$$S = \sum_{i=1}^n 3 + 8 \times \sum_{i=1}^n i$$

$$S = 3n + 8 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = 3n + 4n(n+1)$$

$$S = n(3 + 4n + 4)$$

$$S = n(4n + 7)$$

Affirmation vraie

Exercice 10

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?

C2 = B2+2*A2^2+3*A2+5 et B3 = =2*B2+2*A2^2-A2

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

La suite (v_n) semble géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $v_0 = 7$

Démontrons que (v_n) est géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n + 2(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 + 5$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 8$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 4n^2 + 6n + 10$$

$$v_{n+1} = 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5)$$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

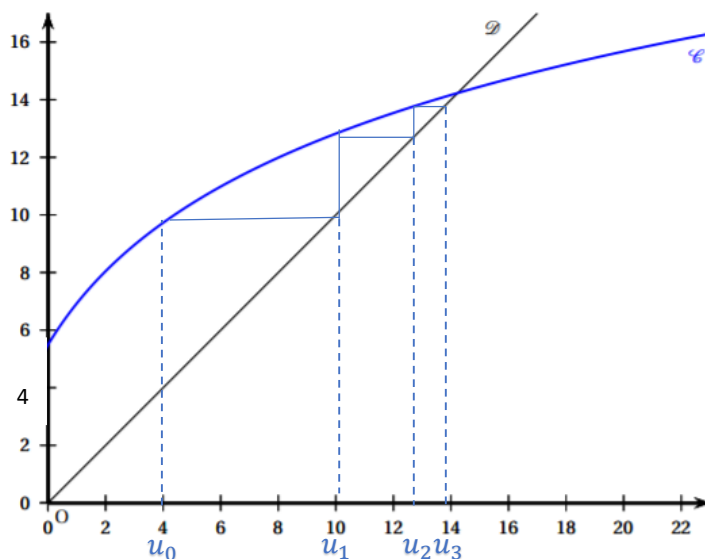
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $v_0 = 7$ ($v_0 = u_0 + 5$)

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ avec f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ dont la courbe représentative (C) est représentée ci-dessous.

1. Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessous les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) et en laissant apparaître les traits de construction.



2. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .

La suite (u_n) semble croissante et converger vers 14,5.

Exercice 12

On considère la suite arithmétique (u_n) dont le terme de rang n s'obtient grâce à l'algorithme ci-contre.

1. a. Préciser le premier terme u_0 et la raison.

D'après l'algorithme, $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$

Donc la raison r est telle que $r = 4$

b. En déduire la formule explicite de u_n .

La suite (u_n) étant arithmétique, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 + 4n$

2. a. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 1000$.

$u_n \geq 1000$ équivaut successivement à

$$10 + 4n \geq 1000$$

$$4n \geq 990$$

$$n \geq 247,5$$

Donc $u_n \geq 1000$ à partir du rang 248.

b. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde à la question 2.a.

```
1 def suite(n):
2     u=10
3     for k in range(1,n+1):
4         u=u+4
5     return(u)
```

```
1 n=0
2 u=10
3 while u<1000:
4     n=n+1
5     u=u+4
6 print ('n=',n)
```

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Ecrire une fonction Python de paramètre n qui retourne sous forme de liste les n premiers termes de la suite (u_n) .

2. Emettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .

La suite (u_n) semble converger vers 2

```
1 from math import *
2 def listesuite(n):
3     u=1
4     L=[u]
5     for i in range(1,n+1):
6         u=sqrt(2*u)
7         L.append(u)
8     return L
```

Exercice 14

On doit à Fibonacci, mathématicien italien du XIII^e siècle le problème suivant.

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu clos. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n comme le nombre de couples présents le n -ième mois. On pose $u_0 = 0$, on a donc $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Compléter la fonction Python ci-contre pour retourner la liste des termes de la suite de u_0 à u_n .
2. Déterminer à l'aide de ce programme fibonacci(12).
Que représente fibonacci(12) dans le contexte du problème posé par Fibonacci ?

Il y aura 144 couples en un an.

```
1 def fibonacci (n):
2     a=0;b=1;L=[a]
3     for i in range (1,1+n):
4         c=a+b
5         a=b
6         b=c
7         L.append(a)
8     return(L)
```

```
>>> fibonacci(12)
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144]
```

Exercice 15

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ pour tout entier naturel n .

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En préciser les éléments caractéristiques.
 (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1^{er} terme $v_0 = 1$
2. Donner, pour tout entier naturel n , une expression de v_n en fonction de n .
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
3. Calculer la somme S des dix premiers termes de la suite (v_n) .

$$S = \sum_{i=0}^9 \left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$S = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$S = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$$

$$S = 3 \left(1 - \frac{1024}{59049}\right)$$

$$S = 3 \times \frac{58025}{59049}$$

$$S = \frac{58025}{19683}$$

Partie B. On modélise une suite (w_n) à l'aide de la fonction suivante écrite en langage Python :

4. Que renvoie l'exécution de
terme(5) ?

```
>>> terme(5)
35
```

```
def terme(n):
    w = 4
    for i in range(n):
        w = 2*w - 3
    return w
```

5. En s'inspirant de la fonction terme(n), proposer une fonction somme_termes(n), écrite en langage Python, qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite (w_n) .

```
1 def somme_termes(n):
2     w=4
3     S=4
4     for i in range (1,n):
5         w=2*w-3
6         S=S+w
7     return S
```