

BILAN : fonctions

Exercices à faire pour les élèves ayant choisi Math Complémentaires

Exercice 1

Pour chaque question, une seule réponse proposée est correcte.

Déterminez laquelle en justifiant.

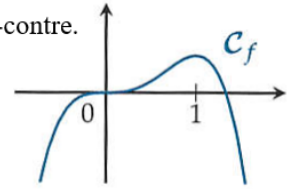
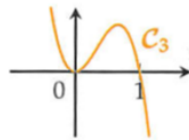
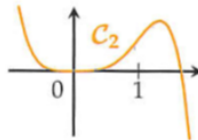
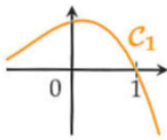
1. On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

Alors, la fonction f' est représentée par :

a) C_1

b) C_2

c) C_3



2. Soit $g: x \mapsto (x^2 - 1)\sqrt{x}$. Alors, pour tout réel x strictement positif, $g'(x)$ est égal à :

a) $x \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$

c) $2x\sqrt{x} - \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}$

3. Soit $h: x \mapsto x - \frac{1}{x}$. La tangente à C_h au point d'abscisse -1 a pour équation :

a) $y = 2x + 2$

b) $y = -2$

c) $y = x + 3$

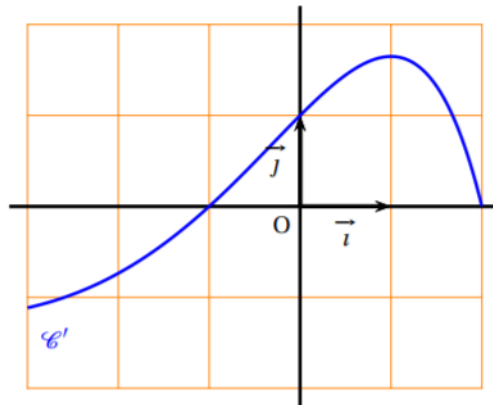
Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3; 2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci-dessous.

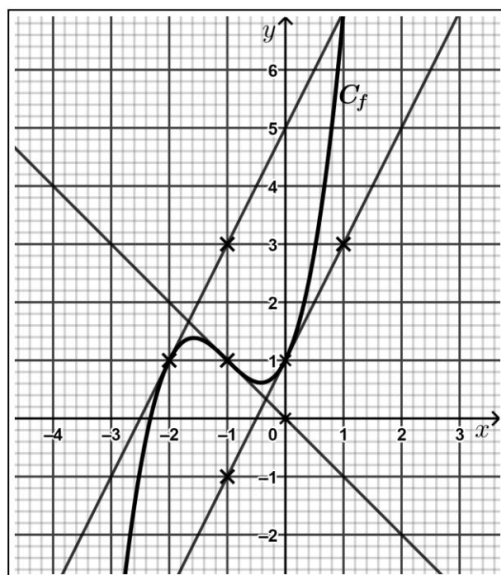


Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3; 2]$, $f(x) \geq -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .
La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1; 0)$.

Exercice 3

Dans la figure ci-dessous, on a tracé C_f , la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2 , -1 et 0 .



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x .
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
4. Le point $S(-4; -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

Exercice 4

QCM : Pour chaque question une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle en justifiant.

1. L'inéquation $|x| \geq 3$ a pour solution dans $\mathbb{R}$:

A : $[-3; 3]$;

B : $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$;

C : $[3; +\infty[$.

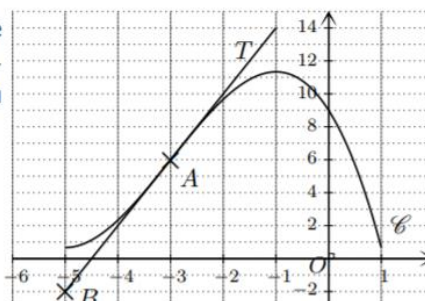
2. On a représenté dans le repère orthogonal ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 1]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(-3; 6)$ et passe par le point $B(-5; -2)$.

Alors $f'(-3)$ est :

A : égal à 4;

B : égal à 6;

C : négatif.



3. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$. L'expression de $g'(x)$ est :

A : $\frac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$;

B : $-\frac{1}{2x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$;

C : $\frac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = (2x - 5)^3$.

Une expression de la dérivée de f est :

A. $3(2x - 5)^2$

B. $6(2x - 5)^2$

C. $2(2x - 5)^2$

Exercice 5

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = x^2 + 4x + 3$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 2; +\infty[$ par $(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ et on note Cf sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] - 2; +\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] - 2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f .

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $] - 2; +\infty[$, et construire le tableau de variations de la fonction f sur $] - 2; +\infty[$.

4. Donner le minimum de la fonction f sur $] - 2; +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe Cf au point d'abscisse 2.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-x+2}{x^2+5}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}$.

3. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. a. Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.

b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{x^2(x-2)}{5(x^2+5)}$.

c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = 4x + 1 - \frac{1}{3-x}$.

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \frac{(-2x+5)(-2x+7)}{(3-x)^2}$

2) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

On donnera les valeurs des extremum.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $(x) = \frac{e^x}{1+x}$. On note Cf la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des ordonnées.

2. La courbe Cf coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

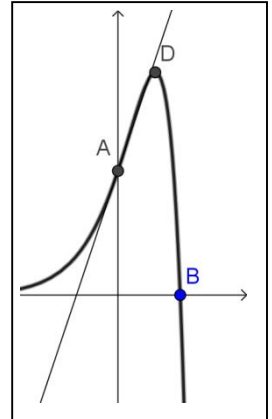
Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5 - 2x)e^x$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f . Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.

A est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

D est le point de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



1. Calculer les coordonnées des points A et B.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (3 - 2x)e^x$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f .
4. En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1,5 ; 2e^{1,5})$.
5. a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
b. Le point D appartient-il à cette tangente ?