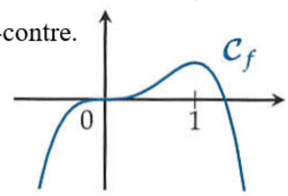
BILAN fin de 1ère: fonctions

Tous les exercices sont à faire pour les élèves ayant choisi EDS math ou l'option maths complémentaires.
https://www.caousou.com/contenu/les-circulaires/?anchor=Les_circulaires

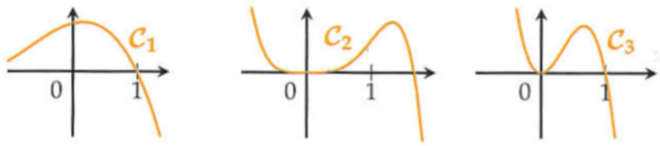
Exercice 1

Pour chaque question, une seule réponse proposée est correcte.
Déterminez laquelle en justifiant.

1. On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
Alors, la fonction f' est représentée par :



a) C_1 b) C_2 c) C_3



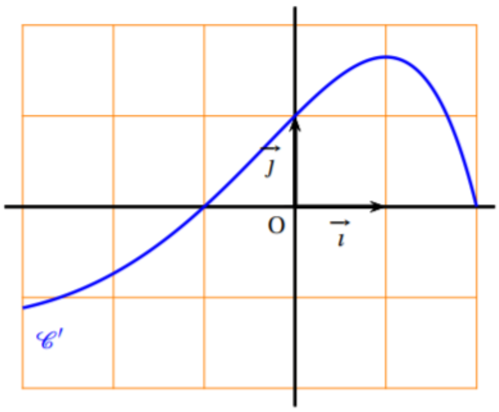
2. Soit $g : x \mapsto (x^2 - 1)\sqrt{x}$. Alors, pour tout réel x strictement positif, $g'(x)$ est égal à :
a) $x\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$ c) $2x\sqrt{x} - \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}$

3. Soit $h : x \mapsto x - \frac{1}{x}$. La tangente à C_h au point d'abscisse -1 a pour équation :
a) $y = 2x + 2$ b) $y = -2$ c) $y = x + 3$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.

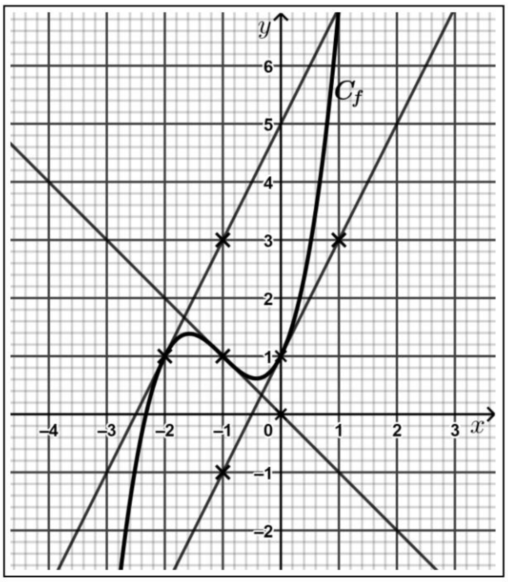


Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

Exercice 3

Dans la figure ci-dessous, on a tracé C_f, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses $-2, -1$ et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Le point $S\,(-4\,;\,-3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

Exercice 4

QCM : Pour chaque question une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle en justifiant.

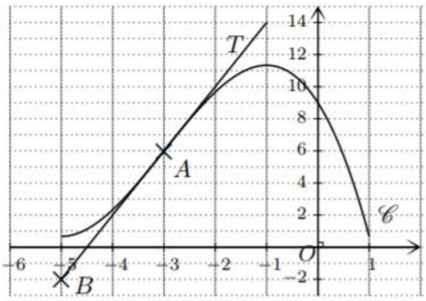
1. L'inéquation $|x| \geqslant 3$ a pour solution dans $\mathbb{R}$:

A : $[-3\,;\,3]$; **B :** $]-\infty\,;\,-3] \cup [3\,;\,+\infty[$; **C :** $[3\,;\,+\infty[$.

2. On a représenté dans le repère orthogonal ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\,;\,1]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A\,(-3\,;\,6)$ et passe par le point $B\,(-5\,;\,-2)$.

Alors $f'(-3)$ est :

A : égal à 4 ; **B :** égal à 6 ; **C :** négatif.



3. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$. L'expression de $g'(x)$ est :

A : $\dfrac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$; **B :** $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; **C :** $\dfrac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $(x) = (2x - 5)^3$.
Une expression de la dérivée de f est :

A. $3(2x - 5)^2$ **B.** $6(2x - 5)^2$ **C.** $2(2x - 5)^2$

Exercice 5

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = x^2 + 4x + 3$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;\ +\infty[$ par $(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ et on note Cf sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2;\ +\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2;\ +\infty[$, et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2;\ +\infty[$.
4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2;\ +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe Cf au point d'abscisse 2.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-x+2}{x^2+5}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}$.

3. Déterminer l'abscisse des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

4. a. Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5}$.

b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \left(-\dfrac{1}{5}x + \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{x^2(x-2)}{5(x^2+5)}$.

c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = 4x + 1 - \dfrac{1}{3-x}$.

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \dfrac{(-2x+5)(-2x+7)}{(3-x)^2}$

2) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} - \{3\}$.
On donnera les valeurs des extremum.

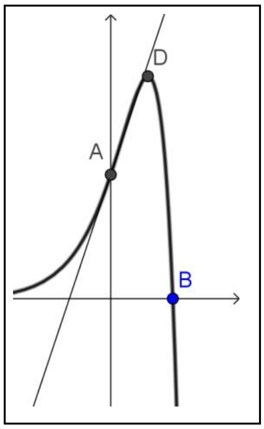
Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par $(x) = \frac{e^{x}}{1+x}$. On note Cf la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des ordonnées.
2. La courbe Cf coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0;\ +\infty[$.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{xe^{x}}{(1+x)^2}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;\ +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0;\ +\infty[$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5 - 2x)\mathrm{e}^{x}$.



On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.

A est le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

D est le point de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (3 - 2x)\mathrm{e}^{x}$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f.
4. En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1{,}5\ ;\ 2\mathrm{e}^{1{,}5})$.
5. a. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
   b. Le point D appartient-il à cette tangente ?