BILAN fin de $1^{ère}$: Suites

Tous les exercices sont à faire pour les élèves ayant choisi EDS math ou l'option maths complémentaires mais les exercices avec * sont facultatifs pour l'option maths complémentaires.

Exercice 1

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n} + 5$

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 16$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \sqrt{v_n} + 5$

1. Calculer à la main u_0, u_1, v_1 et v_2
2. Déterminer, à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, les dix premiers termes de chacune des deux suites.
3. Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer le terme de rang n de la suite (v_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + 2n - 3$

1. Montrer que $u_3 = -2$
2. Démontrer que cette suite est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

Exercice 3 *

Déterminer le sens de variation de chacune des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}2n^2 + n - 3$
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{n+1}$
3. Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$
4. $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n - 5$
5. $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + n^2$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par la fonction Python ci-contre :

1. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).

```python
def terme_u(n):
    u=0
    for k in range (1,n+1):
        u=5*u-1
    return u
```

Exercice 6

1. On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 48$ et de raison -5.
   a. Donner la relation de récurrence vérifiée par (u_n), puis la formule explicite de (u_n).
   b. Calculer u_5.
   c. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Reprendre la question 1. en considérant cette fois la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = -2$ et de raison 3.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n + 3$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3
   b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1$
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison -2.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 8

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 euros.
Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3(c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année).
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.

a. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année.

b. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années.

Exercice 9

Pour chacune des affirmations proposées, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$

Soit la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = u_n - 5$

Affirmation 1 : La suite (t_n) est une suite géométrique.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n + 5$.

L'affirmation qui suit est indépendante des deux précédentes.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n non nul,

$$(8 \times 1 + 3) + (8 \times 2 + 3) + \cdots + (8 \times n + 3) = n(4n + 7)$$

Exercice 10 *

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur ci-contre :

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?

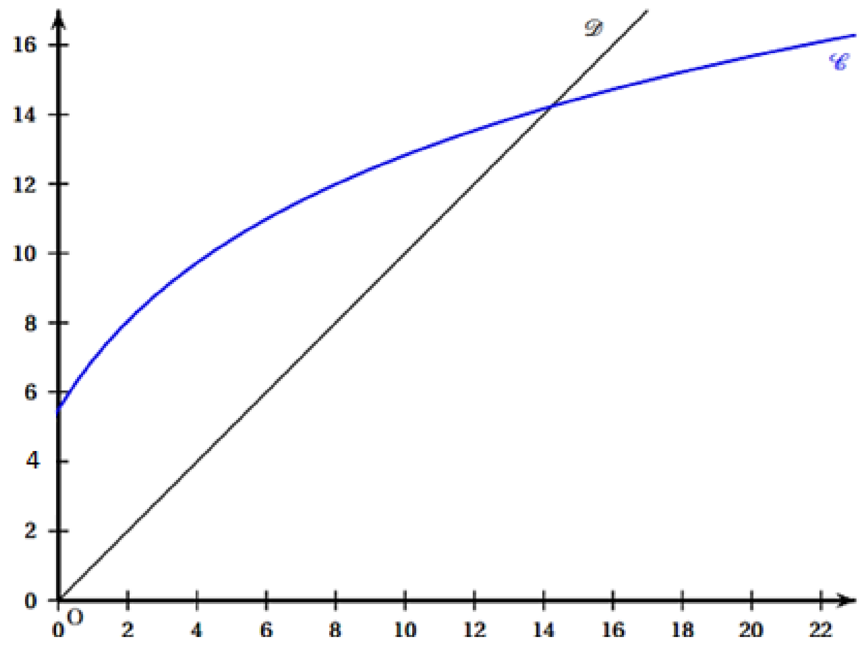
2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	112
7	5	154	224

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$ avec f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ dont la courbe représentative (C) est représentée ci-dessous.

1. Construire sur l'axe des abscisses de la figure ci-dessous les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) en utilisant la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C) et en laissant apparaitre les traits de construction.



2. Conjecturer le sens de variation et la limite de de la suite (u_n).

Exercice 12

On considère la suite arithmétique (u_n) dont le terme de rang n s'obtient grâce à l'algorithme ci-contre.

```python
def suite(n):
    u=10
    for k in range(1,n+1):
        u=u+4
    return(u)
```

1. a. Préciser le premier terme u_0 et la raison.
   b. En déduire la formule explicite de u_n.
2. a. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 1000$.
   b. Modifier la fonction Python précédente pour qu'elle réponde à la question 2.a.

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Ecrire une fonction Python de paramètre n qui retourne sous forme de liste les n premiers termes de la suite (u_n).
2. Emettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 *

On doit à Fibonacci, mathématicien italien du XIII[e] siècle le problème suivant.

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu clos. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n comme le nombre de couples présents le n-ième mois. On pose $u_0 = 0$, on a donc $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Compléter la fonction Python ci-contre pour retourner la liste des termes de la suite de u_0 à u_n.
2. Déterminer à l'aide de ce programme fibonacci(12).
   Que représente fibonacci(12) dans le contexte du problème posé par Fibonacci ?

```
def fibonacci(n):
    a = 0; b = 1; L=[a]
    for i in range (1,n+1):
        c = ...

        a = ...

        b = ...
        L.append(a)
    return L
```

Exercice 15

Les deux parties suivantes sont indépendantes.

Partie A. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En préciser les éléments caractéristiques.
2. Donner, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
3. Calculer la somme S des dix premiers termes de la suite (v_n).

Partie B. On modélise une suite (w_n) à l'aide de la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(n):
    w = 4
    for i in range(n):
        w = 2*w - 3
    return w
```

4. Que renvoie l'exécution de `terme(5)` ?
5. En s'inspirant de la fonction `terme(n)`, proposer une fonction `somme_termes(n)`, écrite en langage Python, qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite (w_n).